Problème1

Le moment de flexion M_f fait apparaître une contrainte normale σ_x dans le plan normal à l'axe *x*, alors que l'effort tranchant a pour effet la présence d'une contrainte de cisaillement τ_{xy} selon *y* dans le même plan, plus une autre contrainte de cisaillement τ_{yx}, de même module, agissant dans le plan de normale *y* et dans la direction *x*.

La matrice des contraintes est alors de la forme :

$$[\Gamma]=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & 0\\ \tau_{xy} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

avec $\sigma_x = \dfrac{M_f}{I}u = \dfrac{12M_f}{BH^3}u$ et $\tau_{xy} = \dfrac{3}{2}\dfrac{T}{BH}\left[1-\left(\dfrac{u}{H/2}\right)^2\right]$

Les contraintes principales σ_k $(k = 1, 2, 3)$ sont les racines de l'équation

$$\left|[\Gamma]-\sigma_k[I]\right| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix}\sigma_x-\sigma_k & \tau_{xy} & 0\\ \tau_{xy} & -\sigma_k & 0\\ 0 & 0 & -\sigma_k\end{vmatrix} = 0$$

où, en développant, $\sigma_k\left(\sigma_k^2-\sigma_x\sigma_k-\tau_{xy}^2\right)=0$

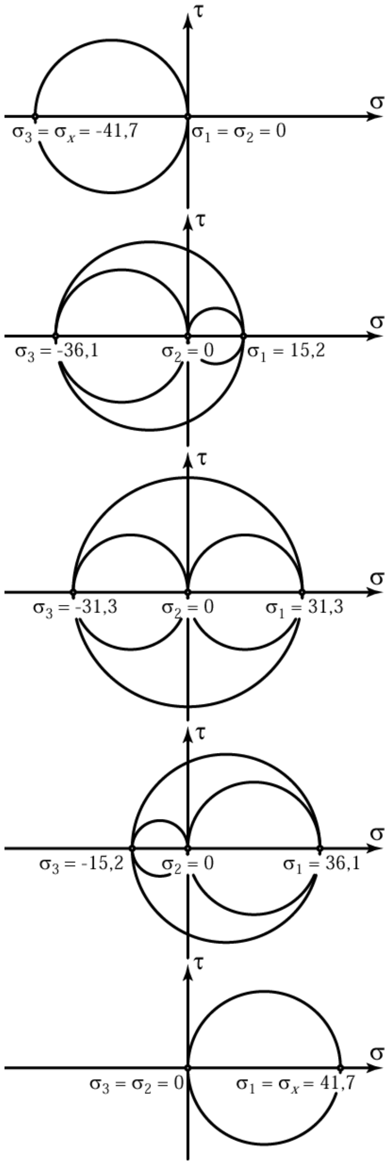
D'où les contraintes principales

$$\begin{cases}\sigma_k = 0\\ \sigma_k = \dfrac{\sigma_x}{2}\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2+4\tau_{xy}^2}\end{cases}$$

Application

$$\sigma_x = \frac{12\cdot 40'000}{4\cdot 12^3}u = 69{,}4\,u \text{ bar}$$

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2}\frac{10'000}{4\cdot 12}\left(1-\frac{u^2}{36}\right) = 313\left(1-\frac{u^2}{36}\right)\text{bar}$$



On peut alors établir le tableau suivant :

Point	u cm	σ_x bar	τ_{xy} bar	σ_1 bar	σ_2 bar	σ_3 bar
M_0^{-2}	-6	-417	0	0	0	-417
M_0^{-1}	-3	-208	234	152	0	-361
M_0^{0}	0	0	313	313	0	-313
M_0^{1}	3	208	234	361	0	-152
M_0^{2}	6	417	0	417	0	0

Remarque :

Ce tableau montre que l'état de contrainte sur les fibres extrêmes est une traction (point M_0^2) ou une compression (point M_0^{-2}) simple, et l'état de contrainte sur l'axe neutre un cisaillement simple (point M_0^0).

Problème 2

La matrice est donc : $(\Gamma)=\begin{bmatrix} p & p & p \\ p & p & p \\ p & p & p \end{bmatrix}$

Les contraintes principales σ_k sont les racines de l'équation : $\det(\Gamma-\sigma_k I)=0$

Soit $\begin{vmatrix} p-\sigma_k & p & p \\ p & p-\sigma_k & p \\ p & p & p-\sigma_k \end{vmatrix}=0$ ou encore $\sigma_k^3 - a\sigma_k^2 + b\sigma_k - c = 0$ avec :

$$a=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z = p+p+p=3p$$

$$b=\sigma_x\sigma_y+\sigma_z\sigma_y+\sigma_x\sigma_z-\tau_{xy}^2-\tau_{zy}^2-\tau_{xz}^2 = p^2+p^2+p^2-p^2-p^2-p^2=0$$

$$c=\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} p & p & p \\ p & p & p \\ p & p & p \end{vmatrix}=0$$

L'équation s'écrit alors : $\sigma_k^3 - 3p\sigma_k^2 = 0$

D'où les contraintes principales : $\sigma_1 = 3p$ $\sigma_2 = 0$ $\sigma_3 = 0$

Ce sont celles de l'état de traction simple, avec $\sigma=\sigma_1=3p$

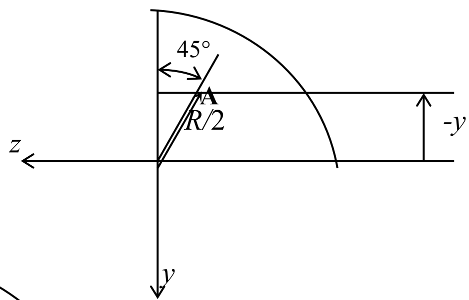
Problème 3

Propriétés de la section : aire : $F=\pi R^2 = 5{,}027\cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$

Moment d'inertie par rapport à z : $I_z = \pi\dfrac{R^4}{4} = 2{,}011\cdot 10^{-6}\ \text{m}^4$

Moment d'inertie polaire : $I_p = 2I_z = 4{,}022\cdot 10^{-6}\ \text{m}^4$

Influence du moment de flexion :



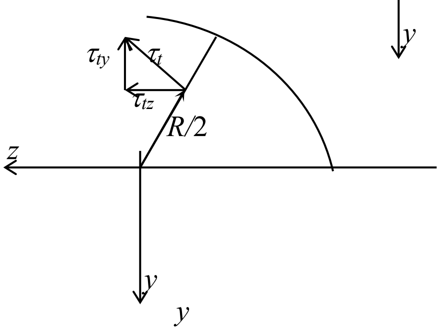
$$\sigma_x = \frac{M_f}{I_z}y$$

$$\sigma_x = \frac{M_f}{I_z}\left(-\frac{R}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -70{,}34\ \text{MPa}$$

Influence du moment de torsion :

$$\tau_t = \frac{M_t}{I_p}r = \frac{M_t}{I_p}\frac{R}{2} = 39{,}79\ \text{MPa}$$

et après décomposition selon *y* et *z*



$$\tau_{ty} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\tau_t = -28{,}13\,\text{MPa}$$

$$\tau_{tz} = \frac{\sqrt{2}}{2}\tau_t = 28{,}13\,\text{MPa}$$

Influence de l'effort tranchant :
L'effort tranchant provoque une contrainte tangentielle selon y qui vaut :

$$\tau_y = \frac{4}{3}\frac{T}{F}\left(1-\left(\frac{y}{R}\right)^2\right) = \frac{4}{3}\frac{T}{\pi R^2}\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2\right) = 11{,}61\,\text{MPa}$$

Finalement on trouve la matrice des contraintes cherchée :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -70{,}34\,\text{MPa} \\ \tau_{xy} &= \tau_{ty} + \tau_y = -16{,}53\,\text{MPa} \\ \tau_{xz} &= \tau_{tz} = 28{,}13\,\text{MPa} \end{aligned}\right\} \Rightarrow [\Gamma] = \begin{bmatrix} -70{,}34 & -16{,}53 & 28{,}13 \\ -16{,}53 & 0 & 0 \\ 28{,}13 & 0 & 0 \end{bmatrix}\text{MPa}$$

Les contraintes principales sont données par $\det\left[[\Gamma]-\sigma I\right] = 0$

$$\begin{vmatrix} -70{,}34-\sigma & -16{,}53 & 28{,}13 \\ -16{,}53 & -\sigma & 0 \\ 28{,}13 & 0 & -\sigma \end{vmatrix} = -\sigma^3 - 70{,}34\sigma^2 + (16{,}53)^2\sigma + (28{,}13)^2\sigma = 0$$

$$\Rightarrow \sigma = 0 \text{ et } \sigma^2 + 70{,}34\sigma - 1065 = 0$$

Ceci donne finalement :

$$\sigma_1 = -35{,}17 + \sqrt{(35{,}17)^2 + 1065} = 12{,}8\,\text{MPa}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -35{,}17 - \sqrt{(35{,}17)^2 + 1065} = -83{,}1\,\text{MPa}$$

Il s'agit d'un état de contrainte bidimensionnel.